ISSN 0216-2393

Jurnal Gradien Vol.2 No.1 Januari 2006 : 144-151

Metode Diagonally Implicit Runge-Kutta Dalam Penyelesaian Model Matematika Sistem *Cardiovascular*

Fanani Haryo Widodo dan Awal Isgiyanto

Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Bengkulu, Indonesia

Diterima 3 Desember 2005; disetujui 26 Desember 2005

Abstrak - Pokok pembahasan paper ini adalah tentang penentuan metode penyelesaian model matematika untuk sistem *cardiovascular*. Model tersebut disajikan sebagai ssistem non-linier persamaan diferensial biasa. Karateristik sistem tersebut adalah sangat “kaku” sebagaimana ditunjukkan oleh nilai eigennya yang riil negatif. Dalam pemilihan metode yang tepat untuk menyelesaikan model tersebut, tingkat akurasi dan efisiensi menjadi ukuran yang penting. Dalam hal ini, telah dijelajahi klas metode implisit *Runge-Kutta*. Fakta menunjukkan bahwa klas metode tersebut sangat “mahal” karena klas metode tersebut pada umumnya melibatkan persamaan aljabar yang ketat dan rumit. Dalam studi yang telah dilakukan, ditemukan bahwa metode *Diagonally Implicit Runge-Kutta* (DIRK) adalah tepat untuk menjawab model tersebut. Dalam hal ini digunakan *Butcher* array yang dihasilkan oleh penelitian Kevin Burrage. Yang menarik dari studi ini adalah bahwa matrik Jacobian memiliki struktur blok diagonal yang terklasifikasi dalam tiga blok sedemikian sehingga metode penyelesaian yang didapat memiliki potensi bagi penyelesaian dengan menggunakan algoritma paralel.

Kata Kunci : **DIRK; model matematika sistem cardiovascular; Butcher array Kevin Burrage; matrik berstruktur blok diagonal.**

1. Pendahuluan

Sistem kontrol memainkan peranan yang sangat penting dalam perkembangan teknologi dan kemajuan peradaban modern. Hal ini banyak dijumpai di semua sektor industri seperti sistem transportasi, pengendalian kualitas produk suatu pabrik, sistem pembangkit energi dll. Demikian juga problem-problem di dalam pengendalian sistem sosial dan ekonomi dalam kehidupan kita dan pengendalian sistem sirkulasi darah dalam sistem *cardiovascular* manusia atau hewan dapat dikaji melalui pendekatan teori kontrol. Didukung oleh kemajuan dan meluasnya penggunaan teknologi komputer, peranan sistem kontrol telah secara dramatis mengalami kemajuan khususnya dalam analisis dan desain.

Sistem *cardiovascular* pada tubuh manusia telah menjadi suatu studi yang intensif di dalam sistem kontrol khususnya dalam suatu kerangka yang terkait dengan problem Mayer wave, suatu osilasi dengan periode yang panjang dalam tekanan darah arteri. Serangan *Mayer wave* sering muncul ketika seseorang berada pada kondisi abnormal seperti kekurangan darah, akibat pendarahan yang berlebihan, atau karena perubahan yang mendadak dalam suplai darah ke bagian-bagian tubuh [**3**]. Dalam suatu masyarakat yang berpenduduk padat dengan lingkungan yang tercemar, masalah *Mayer wave* mungkin cukup potensial sebagai penyakit masyarakat dikarenakan oleh seringnya ditemukan kondisi-kondisi abnormal seperti kemacetan lalu lintas, dan situasi penuh sesak oleh kerumunan manusia dengan udara yang tercemar. Pada kondisi tubuh yang kritis serangan *Mayer wave* dapat menyebabkan implikasi psiologis yang serius seperti pingsan [**1**]. Karenanya studi khusus tentang masalah ini akan memberikan kontribusi pada upaya penyelesaian penyakit masyarakat.

Dari banyak eksperimen yang difokuskan pada *Mayer wave* banyak ditemukan fitur yang menjelaskan gejala sekitar Mayer wave. Meskipun begitu sebab timbulnya *Mayer wave* tetap merupakan problem tak terselesaikan [**13**]. Lebih jauh problem pengembangan metode penyelesaian untuk model matematika dari sistem *cardiovascular* memperoleh perhatian pada beberapa tahun terakhir ini. Abbiw-Jackson melakukan studi tentang sisem *cardiovascular* yang dimodelkan secara matematika dalam bentuk suatu sistem tiga persamaan diferensial biasa nonlinier [**1**]. Mereka menganalisa model tersebut menggunakan metode stabilitas Liapunov dan teori Hoft bifurcation dengan kesimpulan bahwa kenaikan di dalam gain dari baroreflex feedback loop memungkinkan timbulnya serangan osilasi, sedangkan perubahan dalam parameter-parameter model tidak mempengaruhi kestabilan dari titik keseimbangan.

Penelitian ini mencoba mencari penyelesaian problem matematika dari sistem *cardiovascular* sebagaimana diberikan oleh [**1**] melalui pendekatan komputasi numerik. Basaruddin dalam penelitiannya mengajukan suatu metode untuk menjawab model demikian yang didasarkan pada kelas BDF [**9**]. Namun sebegitu jauh banyak penemuan menunjukkan bahwa metode BDF hanya tepat untuk sistem yang tidak begitu kaku, sementara model dari sistem *cardiovascular* mempunyai indikasi cukup stiff sebagaimana hasil yang diperoleh dari penelitian Abbiw-Jackson yang mengatakan bahwa perubahan-perubahan parameter tidak mempengaruhi kestabilan titik kesetimbangan [**1**]. Karenanya untuk menyelesaiakan model tersebut diperlukan daerah kestabilan yang luas. Sifat yang demikian dimiliki oleh sifat metode *Diagonally Implicit Runge-Kutta*. Pada sisi lain kelemahan pada metode *Implicit Runge-Kutta* adalah perhitungannya menggunakan persamaan aljabar yang rumit dan komplek. Dengan kata lain metode ini cukup mahal atau kurang efisien. Peneliti berusaha mengembangkan metode DIRK untuk menjelesaikan problem tersebut.

2. Sistem *Cardiovascular* dan Mayer Wave

Sistem *cardiovascular* adalah sistem sirkulasi darah. Pada manusia dan mamalia tingkat tinggi sistem tersebut dibagi menjadi dua, yaitu sistem siskulasi besar (*sistemik*) yang mensuplai darah dari jantung keseluruh organ tubuh kemudian kembali ke jantung, dan sistem sirkulai kecil (*pulmonary*) yang membawa darah dari jantung ke paru-paru untuk pertukaran gas kemudian kembali ke jantung. Perjalanan darah pada sirkulasi sistemik, darah mengalir dari bilik kiri (*atrium sinistrum*) masuk ke serambi kiri (*ventriculus sinistrum*), kemudian melalui arteri utama (*aorta*) masuk ke jalinan kapiler organ tubuh. Sedangkan perjalanan darah pada sirkulasi kecil, darah mengalir dari bilik kanan (*atrium dextrum*) masuk ke serambi kanan (*ventriculus dextrum*), kemudian melalui arteri paru-paru (*pulmonalis*) masuk ke jalinan kapiler paru-paru kemudian mengalir kembali melalui vena paru-paru masuk ke bilik kiri (*atrium sinistrum*).

Dari sistem sirkulasi di atas terlihat bahwa ada empat volume darah yang memungkinkan dipilih sebagai variabel model sistem *cardiovascular*, yaitu volume darah pada arteri sistemik (*systemic arteries*) v_{SA}, volume darah di dalam vena sistemik (*systemic veins*) v_{SV}, volume darah di dalam vena paru-paru (*pulmonary veins*) v_{PV}, dan volume darah di dalam arteri paru-paru (*pulmonary arteries*) v_{PA}. Akan tetapi penelitian yang dilakukan oleh Abbiw-Jackson menunjukkan bahwa variabel volume darah di dalam arteri paru-paru merupakan volume terkecil. Kecuali itu jika dilihat dari fungsinya, darah yang berada di dalam arteri paru-paru hanya berfungsi sebagai transport pembuangan gas, sehingga ditetapkan untuk diabaikan. Jadi variabel pada penelitian ini v_{SA}, v_{SV} dan v_{PV}.

3. Model Matematika Sistem *Cardiovascular*

Model matematika sistem *cardiovascular* meliputi sistem tiga persamaan diferensial biasa sebagai berikut [**1**]:

$$\frac{dv_{SA}}{dt} = -\frac{v_{SA}}{R_S C_{SA}} + \frac{v_{SV}}{R_S C_{SV}} + \frac{FC_L v_{PV}}{C_{PV}} - \frac{V_D}{R_S C_{SC}}$$

$$\frac{dv_{SV}}{dt} = \frac{v_{SA}}{R_S C_{SA}} - \left(\frac{1}{R_S C_{SV}} + \frac{FC_R}{C_{SV}}\right)(v_{SV} - V_D)$$

$$\frac{dv_{PV}}{dt} = \frac{V_0 - v_{SA} - v_{SV} - v_{PV}}{R_P C_{PA}} - \left(\frac{1}{R_P C_{PV}} + \frac{FC_L}{C_{PV}}\right)$$

dimana C_{SA} = *Compliance in systemic arteries,* C_{PA} = *Compliance in pulmonary arteries,* C_{PV} = *Compliance in pulmonary veins,* C_{SV} = *Systemic venous compliance,* R_S = *Systemic capillary resistance,* R_P = *Pulmonary resistance,* C_R = *Compliance in right heart,* C_L = *Compliance in left heart,* F = *Heart rate,* V_D = *Systemic venous unstressed volume, volume of vessel at* $p_{SV} = 0$, p_{SV} = *Systemic vein pressure,* V_{SA} = *volume of blood in systemic arteries,* V_{SV} = *volume of blood in systemic veins,* V_{PV} = *volume of blood in pulmonary veins*.

Dengan mensubstitusi persamaan F, R_S, C_{SV}, dan V_D yang menyatakan model sistem Baroreflex control, yaitu:

- $F = F_1(1 - B_n) + F_2 = \dfrac{F_1(V_c)^n}{(V_c)^n + (v_{SA})^n} + F_2$

  dimana F_1 dan F_2 konstan, dan F_2 adalah nilai F untuk $B_n = 1$.

- systemic resistance R_S dimodelkan sebagai :

  $$R_S = R_1(1 - B_n) + R_2 = \frac{R_1(V_C)^n}{(V_C)^n + (v_{SA})^n} + R_2$$

- systemic venous compliance C_{SV} dimodelkan sebagai:

  $$C_{SV} = C_1 B_n + C_2 = \frac{C_1(v_{SA})^n}{(V_C)^n + (v_{SA})^n} + C_2$$

- systemic venous unstressed volume V_D dimodelkan sebagai :

  $V_D = D$

  $$V_D = D_1 B_n + D_2 = \frac{D_1(v_{SA})^n}{(V_C)^n + (v_{SA})^n} + C_2$$

maka didapat model nonlinier dari sistem *cardiovascular* sebagai berikut:

1. $$\frac{dV_{SA}}{dt} = -\frac{V_{SA}^{n+1} + V_C^n V_{SA}}{R_2 C_{SA} V_{SA}^n + (R_1 + R_2) V_C^n C_{SA}}$$

$$+\frac{F_2 V_{SA}^n + (F_1 + F_2) V_C^n C_L C_{PV}}{C_{PV} V_{SA}^n + V_C^n C_{PV}}$$

$$+\frac{V_{SV} V_{SA}^n + V_C^n V_{SV} - (D_1 + D_2) V_{SA}^n - D_2 V_C^n}{(C_1 + C_2) R_2 V_{SA}^{2n} + \{((R_1 + R_2)(C_1 + C_2) + R_2 C_2) V_C^n\} V_{SA}^n + (R_1 + R_2) C_2 V_C^{2n}}$$

2. $$\frac{dV_{SV}}{dt} = \frac{V_{SA}^{n+1} + V_C^n V_{SA}}{R_2 C_{SA} V_{SA}^n + (R_1 + R_2) V_C^n C_{SA}}$$

$$+\frac{\{(D_1 + D_2) V_{SA}^n + D_2 V_C^n\}(V_{SA}^n + V_C^n) - (V_{SA}^n + V_C^n) V_{SV}}{\{R_2 V_{SA}^n + (R_1 + R_2) V_C^n\}\{(C_1 + C_2) V_{SA}^n + V_C^n C_2\}}$$

$$-\frac{\{F_2 V_{SA}^n + (F_1 + F_2) V_C^n\} C_R V_{SV}}{(C_1 + C_2) V_{SA}^n + C_2 V_C^n}$$

$$+\frac{\{F_2 V_{SA}^n + (F_1 + F_2) V_C^n\}\{(D_1 + D_2) V_{SA}^n + D_2 V_C^n\}}{(V_{SA}^n + V_C^n)\{(C_1 + C_2) V_{SA}^n + C_2 V_C^n\}}$$

3. $$\frac{dV_{PV}}{dt} = \frac{V_0 - V_{SA} - V_{SV} - V_{PV}}{R_P C_{PA}}$$

$$-\left[\frac{1}{R_P C_{PV}} + \frac{\{F_2 V_{SA}^n + (F_1 + F_2) V_C^n\} C_L}{(V_{SA}^n + V_C^n) C_{PV}}\right] V_{PV}$$

Sedangkan parameter yang relevan terhadap *Mayer wave* ada 16 buah sebagaimana ditunjukkan dalam Tabel 1 di bawah [**1**][**12**][**15**][**17**].

Tabel 1. Nilai parameter yang digunakan dalam penelitian.

Simbol	Nilai
C_{SA}	0,01 lt/mmHG
C_{PA}	0,00667 lt/mmHG
C_{PV}	0,08 lt/mmHG
R_P	1,79 mmHG
C_R	0,035 lt/mmHG
C_L	0,014 lt/mmHG
F	F1 = 80 beats/min
	F1 = 40 beats/min
R_1	20 lt/min
R_2	7,5 lt/min
D_1	3,0 lt
D_2	0,5 lt
C_1	1,0 lt/mmHG
C_2	0,25 lt/mmHG
V_C	1,0 lt
V_D	2,0 lt

4. Masalah Nilai Awal

Masalah nilai awal disajikan sebagai :

$$y' = f(t, y), t > t_0$$
$$y(t_0) = y_0$$

dimana y adalah suatu vektor di dalam R^m dan $f : R^m \to R^m$ adalah suatu fungsi nonlinier. Persamaan ini juga dapat dinyatakan dalam bentuk :

$$y' = f(y), t > t_0$$
$$y(t_0) = y_0$$

Menyelesaikan model ini adalah lebih mudah jika digunakan metode Runge-Kutta, karena tidak diperlukan peubah waktu secara khusus. Ini dilakukan dengan menampilkan peubah waktu sebagai satu komponen dalam sistem [**9**].

Masalah nilai awal tersebut dikatakan kaku jika terdapat perbedaan yang besar antara nilai-nilai eigen λ dari matrik Jacobian permasalahan tersebut. Masalah syarat awal $y' = f(y), y(x_0) = y_0$, y vektor berdimensi m, dengan x_f merupakan titik ujung dari integrasi. Ada masalah syarat awal yang solusi eksaknya dapat ditentukan dengan mudah, akan tetapi banyak juga masalah syarat awal yang solusi eksaknya tidak mungkin ditemukan [**9**]. Sedangkan Alhadi [**2**] menyatakan bahwa $y'(x) = f(y(x))$, $y(x_0) = y_0, f : R^m \to R^m$ dikatakan kaku bila $(x_f - x_0)L >> 1$ dimana L adalah Konstanta *Lipschitz*. Atau jika nilai eigen dari matrik Jacobiannya negatif dan terdapat perbedaan yang besar antara nilai-nilai eigennya.

Jika pada suatu kasus grafiknya turun, maka akan terjadi penurunan dengan laju sebesar $|\lambda_i|$. Semakin besar $|\lambda_i|$ berarti semakin besar penurunannya sebagai akibat perbedaan yang besar antara nilai λ_i, sehingga terjadi perubahan yang besar dan penurunan yang cepat pada suatu interval tertentu. Pada interval dengan penurunan yang cepat diperlukan strategi pengambilan ukuran langkah (step size) yang kecil, sedangkan pada selang yang solusinya berjalan lambat, maka digunakan ukuran langkah yang lebih besar.

Tidak mudah untuk mengetahui nilai L awal pada sebagian besar kasus, sehingga sulit untuk menentukan kapan nilai $(x_f - x_0)L$ termasuk kategori besar [**14**]. Pendekatan lain menyatakan bahwa kekakuan dapat dideduksi dari sifat sistem yang dimodelkan. Hainer dan Wanner menyatakan bahwa masalah nilai awal yang kaku memiliki solusi numerik dimana gerakan lambat yang mulus akan diganggu oleh solusi-solusi yang bergerak cepat didekatnya [**11**].

Untuk menyelesaikan problem yang kaku dapat digunakan metode *Implisit Runge-Kutta* (IRK), dengan berbagai variasinya. Dalam penelitian ini metode yang digunakan adalah metode *Diagonally Implicit Runge-Kutta* (DIRK).

5. Metode Runge-Kutta Umum

Solusi menggunakan pendekatan numerik dapat dilakukan dengan metode *Implisit Runge-Kutta* (IRK). Ada beberapa metode *Implisit Runge-Kutta* yang dapat digunakan, metode *IRK Labatto* [**9**], metode *IRK Radau* [**9**] atau metode *Diagonally Implicit Runge-Kutta* (DIRK).

Secara umum, metode IRK pada tahap-*s* untuk persamaan diferensial biasa $y' = f(t, y)$, dapat ditulis dalam bentuk:

$$Y_i = y_{n-1} + h\sum_{j=1}^{s} a_{ij} f(t_{n-1} + c_j h, Y_j), \qquad 1 \le i \le s$$

$$y_n = y_{n-1} + h\sum_{i=1}^{s} b_i f(t_{n-1} + c_i h, Y_i)$$

Metode tersebut dapat dinyatakan juga dalam notasi :

c1	a11	a12	…	a1s
c2	a21	a22	…	a2s
…	…	…	…	…
cs	as1	as2	…	ass
	b1	b2	…	as

sehingga dapat ditulis $c_i = \sum_{j=1}^{s} a_{ij,i=1,\ldots,s}$ $i = 1,\ldots, s$ [**8**].

Sedangkan metode *Diagonally Implicit Runge-Kutta* (DIRK) 4-tahap sebagai ODE-solver adalah :

1. $V_i = v_n + h\sum_{j=1}^{4} a_{ij} f(V_j) \qquad ; i = 1,2,3,4$

2. $v_{n+1} = v_n + h\sum_{i=1}^{4} b_i f(V_i)$

Kelas dari metode ini diklasifikasikan sesuai integrator yang dinyatakan sebagai *Butchers* array :

$$\begin{array}{c|c} c & A \\ \hline & b^{T} \end{array}$$

Dimana *c* dan *b* adalah vektor yang panjangnya *s* dan *A* adalah suatu matrik berordo *s* x *s*. Basaruddin telah menunjukkan penggunaan Butchers array diatas dengan rumus Runge-Kutta [**9**].

$$Y_i = y_n + h\sum_{j=1}^{s} a_{ij} f(Y_j), i = 1 \ldots s$$

$$y_{n+1} = y_n + h\sum_{i=1}^{s} b_i f(Y_i)$$

Ambil $Y = \left(Y_i^T, \ldots, Y_s^T\right)^T \in R^{sm}$ dan pilih $F(Y) = \left(f(Y_i)^T, \ldots, f(Y_s)^T\right)^T$, maka jika metode *Runge-Kutta* dituliskan dalam notasi tensor, dinyatakan sebagai :

$$Y = e \otimes y_n + h(A \otimes I_m)F(Y)$$
$$y_{n+1} = y_n + h(b^T \otimes I_m)F(Y)$$

Pada notasi ini tampak jelas bahwa sistem persamaan di atas memerlukan penyelesaian di setiap tahap. Dalam kasus f adalah suatu fungsi nonlinier, persamaan tersebut menunjukkan munculnya sistem persamaan nonlinier. Dalam kasus ini, metode iterasi seperti metode Newton boleh digunakan untuk menentukan Yi. Jika pada akhir suatu iterasi Y_i diganti oleh Y_i + di iterasi Newton akan memerlukan vektor di yang baru agar memenuhi :

$$\left(I_s \otimes I_m - hI\right)d = \Psi$$

dimana J adalah blok matrik orde sm, dengan elemen (i,j) adalah aijf(Yj), *i,j* =1, … ,*s* dan

$$d = \left(d_1^T,\dots,d_s^T\right)^T, \Psi = \left(\Psi_1^T,\dots,\Psi_s^T\right)^T$$

$$\Psi_i = -Y_i + y_n + h\sum_{j=1}^{s} a_{ij} f\left(Y_j\right), i = 1,\dots,s$$

Bentuk persamaan ini juga mudah digunakan dengan aproksimasi matriks *Jacobian* $f\left(Y_j\right)$ menggunakan $f\left(y_n\right)$, yang telah dihitung pada tahap n.

6. Algoritma DIRK Untuk Model Matematika Sistem *Cardiovascular*

Metode Diagonally Implicit Runge-Kutta (DIRK) 4-tahap adalah :

1. $$.V_i = v_n + h\sum_{j=1}^{4} a_{ij} f\left(V_j\right);\ j = 1,2,3 \text{ and } 4 \qquad (1)$$

2. $$v_{n+1} = v_n + h\sum_{i}^{4} b_i f\left(V_i\right);\ i = 1,2,3 \text{ and } 4 \qquad (2)$$

dengan V_i, v_n dan f adalah vektor tiga demensi. Pengertian 4 tahap menunjuk pada proses untuk mendapatkan nilai vn melalui 4 tahap, yaitu V_1, V_2, V_3 dan V_4. Karenanya Persamaan (1) merupakan sistem persamaan yang terdiri dari 12 persamaan nonlinier. Untuk menentukan nilai V_1...V_4 yang memenuhi sistem persamaan tersebut dipakai iterasi Newton [**18**].

Untuk menerapkan metode Newton pada (1) maka Persamaan (1) tersebut ditulis sebagai:

$$F_i\left(V_1,V_2,V_3,V_4\right) = -V_i + v_n + h\sum_{j=1}^{4} a_{ij} f\left(V_j\right);\ i = 1,2,3 \text{ and } 4 \qquad (3)$$

Algoritma Newton tersebut adalah sebagai berikut:

1. Choose a starting point *Vi**
2. Calculate $F_i(x^*)$
3. Stop if all components are sufficiently small
4. Calculate $J(x^*)$
5. Solve for d the n x n system $J(x^*)d = -f(x^*)$; $x = x^* + d$
6. Set $x^* = x$
7. Repeat from step 2

Perhitungan k_i untuk persamaan $\underline{U} = A\underline{U} + \underline{d}(t)$ dapat diturunkan menjadi :

$$\underline{k}_i = A(\underline{U} + h\sum_{j=1}^{i} a_{ij}\underline{k}_j) + \underline{d}\left(t + c_i h\right),$$

dengan $i = 1,2,3,4$. untuk selanjutnya didapat

$$N\underline{k} = \underline{rk} = \begin{bmatrix} A\underline{U} + \underline{d}\left(t + hc_1\right) \\ A\underline{U} + \underline{d}\left(t + hc_2\right) \\ A\underline{U} + \underline{d}\left(t + hc_3\right) \\ A\underline{U} + \underline{d}\left(t + hc_4\right) \end{bmatrix}$$

yang merupakan vektor berukuran 4nx1 dengan N adalah

$$N = \begin{bmatrix} I - a(1,1)hA & 0 & 0 & 0 \\ -a(2,1)hA & I - a(2,2)hA & 0 & 0 \\ -a(3,1)hA & -a(3,2)hA & I - a(3,3)hA & 0 \\ -a(4,1)hA & -a(4,2)hA & 0 & I - a(4,4)hA \end{bmatrix}$$

yang merupakan matrik berukuran 4nx4n, sedangkan I dan 0 adalah matrik identitas dan matrik nol yang berukuran *n* x *n*, dan $\underline{k}$ adalah vektor berukuran 4*n*x1.

Algoritma DIRK 4-tahap tersebut adalah [**16**]:

Langkah 1. Hitung $\underline{rk}$ = [$\underline{rk}1$ $\underline{rk}2$ $\underline{rk}3$ $\underline{rk}4$], dengan $\underline{rkI}$ = AU + $d(t+h*ci)$ adalah vektor berukuran *n*x1, *i* = 1,2,3 dan 4.

Langkah 2. Hitung *Nij* dengan *Nii* =I - *aii*h*A*, *Nij* = *aij*h*A*, *i* = 1,2,3 dan 4, *j* = 1, 2, *i* – 1.

Langkah 3. Selesaikan $N\underline{k} = \underline{rk}$ untuk mencari $\underline{k}$ = [$\underline{k}1$ $\underline{k}2$ $\underline{k}3$ $\underline{k}4$]T, dengan $\underline{k}1$, $\underline{k}2$, $\underline{k}3$, $\underline{k}4$ masing-masing berukuran *n*x1.

Langkah 4. Hitung solusi $\underline{U}m+1 = \underline{U}m + h\sum_{i=1}^{4}\underline{k}_i\underline{b}_i$, dengan $\underline{U}m+1$ dan $\underline{U}m$ masing-masing berukuran *n*x1.

7. Solusi Model

Untuk menyelesaikan model tersebut, ODE-solver yang digunakan adalah rumus Diagonally Implicit Runge-Kutta. Dalam perhitungannya ditunjukkan, bahwa modelnya melibatkan sejumlah parameter yang nilainya merupakan hasil kajian literature sebagaimana disajikan di atas.

Matriks Jacobian J(*f*) yang sesuai dengan tiga peubah ($v_{S.A}$ = volume darah di dalam systemic arteries, v_{SV} = volume darah di dalam systemic veins dan v_{PV} = volume darah di dalam pulmonary veins) disajikan sbb:

Ambil vektor $v = \begin{pmatrix} V_{SA} \\ V_{SV} \\ V_{PV} \end{pmatrix}$. Maka $\mathrm{v}' = \mathrm{f}(\mathrm{v})$ dan

$$v' = \begin{bmatrix} \dfrac{dV_{SA}}{dt} \\ \dfrac{dV_{SV}}{dt} \\ \dfrac{dV_{PV}}{dt} \end{bmatrix} \; ; \; f(v) = \begin{bmatrix} f_1(v) \\ f_2(v) \\ f_3(v) \end{bmatrix}$$

$$J(f) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial V_{SA}} & \dfrac{\partial f_1}{\partial V_{SV}} & \dfrac{\partial f_1}{\partial V_{PV}} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial V_{SA}} & \dfrac{\partial f_2}{\partial V_{SV}} & \dfrac{\partial f_2}{\partial V_{PV}} \\ \dfrac{\partial f_3}{\partial V_{SA}} & \dfrac{\partial f_3}{\partial V_{SV}} & \dfrac{\partial f_3}{\partial V_{PV}} \end{bmatrix}$$

Metode implicit *Runge-Kutta* sangat layak untuk menyelesaikan masalah tersebut, karena metode ini akan mempunyai daerah stabilitas yang luas ('large stability region'). Alhadi [**2**] dalam penelitiannya menunjukkan bahwa integrator mempunyai sifat-sifat seperti yang disampaikan oleh Burrage, K. [**10**]

0	0			
1	1/2	1/2		
3/2	5/8	3/8	1/2	
1	7/18	1/3	-2/9	1/2
	7/18	1/3	-2/9	1/2

Penerapan Butcher array pada rumus DIRK menghasilkan model :

1. $V_1 = v_n$

$$V_2 = v_n + h\left[\frac{1}{2} f(V_1) + \frac{1}{2} f(V_2)\right]$$

$$V_3 = v_n + h\left[\frac{5}{8} f(V_1) + \frac{3}{8} f(V_2) + \frac{1}{2} f(V_3)\right]$$

$$V_4 = v_n + h\left[\frac{7}{18} f(V_1) + \frac{1}{3} f(V_2) - \frac{2}{9} f(V_3) + \frac{1}{2} f(V_4)\right]$$

2. $V_{n+1} = v_n + h\left[\frac{7}{18} f(V_1) + \frac{1}{3} f(V_2) - \frac{2}{9} f(V_3) + \frac{1}{2} f(V_4)\right]$

Substitusi *f* ke rumus RK menghasilkan

1). $\begin{bmatrix} V_{SA} \\ V_{SV} \\ V_{PV} \end{bmatrix}_1 = \begin{bmatrix} v_{SA} \\ v_{SV} \\ v_{PV} \end{bmatrix}_n$

$$\begin{bmatrix} V_{SA} \\ V_{SV} \\ V_{PV} \end{bmatrix}_2 = \begin{bmatrix} v_{SA} \\ v_{SV} \\ v_{PV} \end{bmatrix}_n + h\left[\frac{1}{2} f(V_{SA}, V_{SV}, V_{PV})_1 + \frac{1}{2} f(V_{SA}, V_{SV}, V_{PV})_2\right]$$

$$\begin{bmatrix} V_{SA} \\ V_{SV} \\ V_{PV} \end{bmatrix}_3 = \begin{bmatrix} v_{SA} \\ v_{SV} \\ v_{PV} \end{bmatrix}_n + h\left[\frac{5}{8} f(V_{SA}, V_{SV}, V_{PV})_1 + \frac{3}{8} f(V_{SA}, V_{SV}, V_{PV})_2\right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} f(V_{SA}, V_{SV}, V_{PV})_3 \right]$$

$$\begin{bmatrix} V_{SA} \\ V_{SV} \\ V_{PV} \end{bmatrix}_4 = \begin{bmatrix} v_{SA} \\ v_{SV} \\ v_{PV} \end{bmatrix}_n + h\left[\frac{7}{18} f(V_{SA}, V_{SV}, V_{PV})_1 + \frac{1}{3} f(V_{SA}, V_{SV}, V_{PV})_2\right.$$

$$\left. - \frac{2}{9} f(V_{SA}, V_{SV}, V_{PV})_3 + \frac{1}{2} f(V_{SA}, V_{SV}, V_{PV})_4 \right]$$

2)

$$\begin{bmatrix} V_{SA} \\ V_{SV} \\ V_{PV} \end{bmatrix}_{n+1} = \begin{bmatrix} v_{SA} \\ v_{SV} \\ v_{PV} \end{bmatrix}_n + h\left[\frac{7}{18} f(V_{SA}, V_{SV}, V_{PV})_1 + \frac{1}{3} f(V_{SA}, V_{SV}, V_{PV})_2\right.$$

$$\left. - \frac{2}{9} f(V_{SA}, V_{SV}, V_{PV})_3 + \frac{1}{2} f(V_{SA}, V_{SV}, V_{PV})_4 \right]$$

dimana : $f(V_{SA}, V_{SV}, V_{PV}) = \begin{bmatrix} \dfrac{dV_{SA}}{dt} \\ \dfrac{dV_{SV}}{dt} \\ \dfrac{dV_{PV}}{dt} \end{bmatrix}$

Analisis pada penelitian ini menunjukkan bahwa model yang didapatkan adalah kaku, hal ini terlihat dari hasil nilai ciri (*eigen values*) dari matriks Jacobian :

$$\mathrm{J}(f) = \begin{bmatrix} -773.5092704 & .07619046925 & 76.9999931 \\ 303.2159440 & -7.767618368 & 0 \\ 616.2429676 & -83.75699967 & -167.740235 \end{bmatrix}$$

pada sistem persamaan diferensial biasa, yaitu :

$$\lambda_1 = -846.841602$$
$$\lambda_2 = -51.08783187 + 21.202184461$$
$$\lambda_3 = -51.08783187 - 21.202184461$$

Hasilnya menunjukkan bahwa sebaran nilai cirinya negatif dan nilai mutlaknya berbeda cukup lebar antara nilai ciri yang satu dengan yang lain. Ini menunjukkan bahwa modelnya adalah kaku (*stiff*). Hasil lain adalah bahwa matriks Jacobian ordo 12 x 12 J(*FF*) menunjukkan suatu bentuk block diagonal seperti di bawah ini:

$$
\begin{bmatrix}
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{dF21}{dV11} & \frac{dF21}{dV12} & \frac{dF21}{dV13} & \frac{dF21}{dV21} & \frac{dF21}{dV22} & \frac{dF21}{dV23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{dF22}{dV11} & \frac{dF22}{dV12} & 0 & \frac{dF22}{dV21} & \frac{dF22}{dV22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{dF23}{dV11} & \frac{dF23}{dV12} & \frac{dF23}{dV13} & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{dF31}{dV11} & \frac{dF31}{dV12} & \frac{dF31}{dV13} & \frac{dF31}{dV21} & \frac{dF31}{dV22} & \frac{dF31}{dV23} & \frac{dF31}{dV31} & \frac{dF31}{dV32} & \frac{dF31}{dV33} & 0 & 0 & 0 \\
\frac{dF32}{dV11} & \frac{dF32}{dV12} & 0 & \frac{dF32}{dV21} & \frac{dF32}{dV22} & 0 & \frac{dF32}{dV31} & \frac{dF32}{dV32} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{dF33}{dV11} & \frac{dF33}{dV12} & \frac{dF33}{dV13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{dF41}{dV11} & \frac{dF41}{dV12} & \frac{dF41}{dV13} & \frac{dF41}{dV21} & \frac{dF41}{dV22} & \frac{dF41}{dV23} & \frac{dF41}{dV31} & \frac{dF41}{dV32} & \frac{dF41}{dV33} & \frac{dF41}{dV41} & \frac{dF41}{dV42} & \frac{dF41}{dV43} \\
\frac{dF42}{dV11} & \frac{dF42}{dV12} & 0 & \frac{dF42}{dV21} & \frac{dF42}{dV22} & 0 & \frac{dF42}{dV31} & \frac{dF42}{dV32} & 0 & \frac{dF42}{dV41} & \frac{dF43}{dV42} & 0 \\
\frac{dF43}{dV11} & \frac{dF43}{dV12} & \frac{dF43}{dV13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{dF43}{dV41} & \frac{dF43}{dV42} & \frac{dF43}{dV43}
\end{bmatrix}
$$

Dalam hal ini penggunaan parameter dan nilai awal sesuai dengan literatur [**1**][**12**][**15**][**17**].

Algoritma yang dibangun melalui DIRK-4 tersebut telah menghasilkan nilai konvergensi untuk vektor volume darah (V_{SA}, V_{SV}, V_{PV}) sebagai berikut:

		Nilai V								
		V_1	V_2	V_3	V_1	V_2	V_3	V_1	V_2	V_3
Nilai awal		1.00	3.40	0.50	1.00	3.45	0.50	1.00	3.45	0.50
I	1	0.8446	1.5483	2.2118	0.8465	1.5580	2.1856	0.8465	1.5676	2.1956
T	2	0.8641	1.2120	2.5488	0.8641	1.2139	2.5461	0.8641	1.2158	2.5449
	3	0.8630	1.1442	2.6202	0.8630	1.1445	2.6198	0.8630	1.1449	2.6195
E	4	0.8631	1.1311	2.6340	0.8631	1.1312	2.6339	0.8631	1.1312	2.6339
R	5	0.8631	1.1285	2.6367	0.8631	1.1286	2.6367	0.8631	1.1286	2.6367
	6	0.8631	1.1280	2.6372	0.8631	1.1280	2.6372	0.8631	1.1280	2.6372
A	7	0.8631	1.1279	2.6373	0.8631	1.1279	2.6373	0.8631	1.1279	2.6373
S	8	0.8631	1.1279	2.6374	0.8631	1.1279	2.6374	0.8631	1.1279	2.6374
	9	0.8631	1.1279	2.6374	0.8631	1.1279	2.6374	0.8631	1.1279	2.6374
I	10	0.8631	1.1279	2.6374	0.8631	1.1279	2.6374	0.8631	1.1279	2.6374

8. Kesimpulan

Dari kajian di atas dapat dirumuskan beberapa poin kesimpulan sebagai berikut:

Untuk parameter-parameter yang diperoleh dari hasil survey literatur, model matematika dari sistem *cardiovascular* merupakan problem yang stiff seperti ditunjukkan oleh *eigenvalue* bernilai riil dari matrik Jacobiannya yang selalu negatif.

Meskipun titik konvergensi dari vektor volume darah bisa dicapai dengan algoritma yang dikembangkan namun akurasi konvergensi tersebut masih perlu diuji dengan mengembangkan estimasi kesalahan dalam algoritmanya.

Matrik Jacobian yang diturunkan dari DIRK 4-tahap berstruktur blok diagonal. Karenanya problem tersebut dapat diselesaikan dengan metode paralel.

Daftar Pustaka

[1] Abbiw-Jackson, S.M and William F. Langford, *Gain-induced Oscillations in Blood Pressure*, **1998**, Journal of Mathematical Biology, 37, 203-234

[2] Alhadi, B., *Analisis Kinerja Integrator Singly Diagonally Implicit Runge-Kutta Method (SDIRK) dalam Menyelesaikan Sistem ODE yang Kaku*, **2000**, Jurnal Penelitian UI. (submitting).

[3] Anderson, B.A., R.A. Kenney, and E. Neil, *The role of the Chemoceptors of the Carotid and Aortic Regions in the Productions of the Mayer Waves*, 1950, Acta. Physiol. Scand., 20, 203-220

[4] Anonim, *An Adaptive Method of Lines for Non-Linear System of Convection-Diffusion-Reaction Equations Arising from Contaminant Transport in Groundwater Pollution,* **1998**, Jakarta, Faculty of Computer Science - University of Indonesia.

[5] Anonim, *Parallel Hepscotch Methods for Shallow Water Equations*, **1999**, Makara, Depok: No.6 Seri B. 2 Januari 1999. p. 60-68

[6] Anonim, *Prekondisi Otomatis Metode Conjugate Gradient untuk Penyelesaian Persoalan Optimisasi*, **2000**, Makara, no. 7 seri B Mei, hal. 49-55.

[7] Anonim, *Stiff Differential Equations Solved by Radau Methods*, **1998**, Switzerland : Dept. de Mathematiques, Universite de Geneve

[8] Ascher, U. M. and L. R. Petzold, *Computer Methods for Ordinary Differential Equations and Differential-Algebraic Equations*, **1998**, Philadelphia : Siam.

[9] Basaruddin, T., *Parallel Methods for Ordinary Differential Equations, Parallel Simulation Environment and Its Application Groundwater Flow*, **2000a**, (Monitoring and Self Evaluation Report Graduate Team Research Grant BATCH IV), Jakarta: Faculty of Computer Science-University of Indonesia.

[10] Burrage, K. et. al., *A-Four Stage Index 2 Diagonally Implicit Runge-Kutta Method*, **1999**, Laporan riset dari CAPEC (Computer Aided Process Engineering Centre), Brisbane : University of Quensland.

[11] Hairer, E and G Wanner, *Solving Ordinary Differential Equations II. Stiff and Differential-Algebraic Problems. Springer Seriea in Computational Mathematics*, **1990**, Springer Verlag.

[12] Hoppensteadt, F.C. and C.S. Peskin, *Mathematics in Medicine and the Life Sciences,* **1992**, New York : Springer-Verlag.

[13] Penaz, J., *Mayer Wave: History and Methodology*, **1978**, Automedica, 2, 135-141.

[14] Sandys, D. Y. dan T. Basaruddin, *Evaluasi Kinerja Radau IIA Dalam Menyelesaikan Persamaan Diferensial Kaku, Parallel Simulation Environment and Its Application Groundwater Flow*, **1999**, (Monitoring and Self Evaluation Report Graduate Team Research Grant BATCH IV), Jakarta: Faculty of Computer Science-University of Indonesia.

[15] Schnittinger, I. et. al., *Standardized intracardiac measurements of two-dimensional echocardiography*, **1983**, J Am Coll Cardiol. 5: 934.

[16] Suhartono, Efek Diskritisasi Spatial Methode Galerkin Semi Deskrit dan Metode Beda Hingga Terhadap Kinerja Metode Runge-Kutta Implisit Diagonal, **1999**, *Thesis*, Depok : Fasilkom Universitas Indonesia.